Clamaths.fr
-
Les Roc en Terminale S

CONTENTS

ROC 1 – THEOREME DE COMPARAISON POUR LES SUITES

Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :
u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang
$(\exists n_0 \in \mathbb{N}\ tel\ que, \forall n \geq n_0, u_n \leq v_n)$
Et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

<u>Démonstration :</u>

u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang donc il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \leq v_n$.

On sait de plus que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc pour tout réel A, il existe un entier $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1, u_n \geq A$

Ainsi quel que soit $A \in \mathbb{R}$, pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$, $A \leq u_n$ et $u_n \leq v_n$ donc $A \leq v_n$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

ROC 2 – LIMITE DE q^n LORSQUE $q > 1$

Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ lorsque $q > 1$

<u>Pré-requis :</u>

1) Inégalité de Bernouilli : $(1+a)^n \geq 1 + na$
2) Théorème de comparaison

<u>Démonstration :</u>

Soit $q > 1$, posons $q = 1 + a$ où $a > 0$

D'après l'inégalité de Bernouilli on a : $q^n = (1+a)^n \geq 1 + na$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$ car $a > 0$, donc d'après le théorème de comparaison (ROC 1) :

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$$

ROC 3 – UNICITE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

> Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée ($f = f'$) et qui vaut 1 en 0 ($f(0) = 1$)

Série de questions possibles :

1) Montrer que la fonction $h(x) = f(x) \times f(-x)$ est une constante et que cette constante est 1
2) Supposez qu'il existe 2 fonctions f et g vérifiant ces conditions, montrer alors que ces fonctions sont les mêmes en étudiant les variations de $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Démonstration :

Soit f une fonction définie telle que $f = f'$ et $f(0) = 1$.

Etape 1 : On montre que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$:

Notons $h(x) = f(x) \times f(-x)$

h est dérivable en tant que produit de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times [-f'(-x)]$

$h'(x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) \quad \text{car} \quad f' = f$

D'où : $h'(x) = 0$

h est donc une fonction constante. De plus $h(0) = f(0) \times f(0) = 1 \quad \text{car} \quad f(0) = 1$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a donc $h(x) = f(x) \times f(-x) = 1$.

Le produit de $f(x)$ par $f(-x)$ étant toujours égal à 1, $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Etape 2 : Prouvons l'unicité

Supposons qu'il existe f et g telles que : $f = f'$, $g = g'$ et $f(0) = g(0) = 1$

On a montré précédemment qu'une telle fonction ne s'annule pas, donc on peut définir la fonction

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

ϕ est dérivable en tant que quotient de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $g \neq 0$:

$$\phi'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Or $f'(x) = f(x)$ et $g'(x) = g(x)$

D'où : $\phi'(x) = 0$. La fonction ϕ est donc constante, de plus $\phi(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 1$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

D'où : $\boxed{f = g}$

ROC 4 – LIMITES DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Démontrer que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

Principe de la démonstration (pour la limite en $+\infty$) :

On étudie les variations de la fonction $f(x) = e^x - x$ afin de montrer qu'elle est positive, puis on utilise le théorème de comparaison des limites de fonctions.

Remarque : Pour la limite en $-\infty$ il suffit de se servir du résultat de la limite en $+\infty$

1^{er} Série de questions possibles (pour la limite en $+\infty$) :

1) Etudier les variations de $f(x) = e^x - x$
2) En déduire le signe de $f(x)$ puis la limite de e^x lorsque $x \to +\infty$ en utilisant le théorème de comparaison
3) En déduire la limite de e^x lorsque $x \to -\infty$

2^{ème} Série de questions possibles (pour la limite en $+\infty$) :

1) Montrer que $f(x) \geq x + 1$ en étudiant les variations de $f(x) = e^x - x - 1$
2) En déduire la limite de e^x lorsque $x \to +\infty$ en utilisant le théorème de comparaison
3) En déduire la limite de e^x lorsque $x \to -\infty$

Démonstration :

- Montrons que $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = e^x - x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de 2 fonctions qui le sont : $f'(x) = e^x - 1$

$$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1$$
$$\Leftrightarrow e^x \geq e^0$$
$$\Leftrightarrow x \geq 0$$

D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geq 1$, donc $e^x \geq x+1$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x+1 = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

- Montrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc par composition : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

Ainsi : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$

ROC 5 – EQUATION CARTESIENNE D'UN PLAN

Caractériser les droites d'un plan de l'espace par une relation $ax+by+cz+d=0$ avec a, b, c trois nombres réels non tous nuls

Théorème :

1) Si $\vec{n}(a;b;c)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et $A(x_A;y_A;z_A) \in \mathcal{P}$, alors $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$
2) Réciproquement, si a, b, c sont trois nombres donnés non tous nul, l'ensemble des points M tel que $ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$

Démonstration :

1) Soit $M(x;y;z)$ un point du plan $\mathcal{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc :

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-x_A)\times a + (y-y_A)\times b + (z-z_A)\times c = 0$$

$$\Leftrightarrow ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A = 0$$

En posant $d = -ax_A - by_A - cz_A$ on a bien une équation de la forme : $ax + by + cz + d = 0$

2) Considérons l'équation $ax + by + cz + d = 0$. On peut facilement trouver un point vérifiant l'équation ; sachant qu'au moins $a, b, ou\ c$ est différent de 0, si par exemple $a \neq 0$, le point $A(-\frac{d}{a}; 0; 0)$ vérifie l'équation. Considérons ainsi un point $B(x_0; y_0; z_0)$ vérifiant l'équation. On a donc : $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ et ainsi : $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

Soit $M(x; y; z)$ un point quelconque vérifiant l'équation, on a :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\vec{n} = 0$$

Où : $\vec{n}(a; b; c)$

Ce qui prouve bien que l'ensemble des points M appartient à un plan passant par le point B et de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$

ROC 6 – ORTHOGONALITE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Démontrer qu'une droite Δ est orthogonale à toute droite d'un plan (sous-entendu « orthogonale à un plan ») si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Démonstration :

- => : Supposons qu'une droite Δ soit orthogonale à un plan P, alors elle est orthogonale à toute droite de P. Donc elle est bien orthogonale à deux droites sécantes de P
- <= : Supposons maintenant qu'une droite Δ soit orthogonale à deux droites sécantes d'un plan P.
  Soit $\vec{n}$ un vecteur directeur de Δ,

ROC 7 – PROBABILITES - INDEPENDANCE DE 2 EVENEMENTS

Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour A et $\bar{B}$

Démonstration :

Si A et B sont indépendants alors $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

B et $\bar{B}$ forment une partition de l'univers, on a donc : $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$

D'où : $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$

$$= p(A) - p(A) \times p(B)$$

$$= p(A)(1 - p(B))$$

$$= p(A) \times p(\bar{B})$$

A et $\bar{B}$ sont bien indépendants.

ROC 8 – ESPERANCE DE LA LOI EXPONENTIELLE

Démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ est : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Pré-requis :

La densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre λ est $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

L'espérance est : $E(X) = \lim\limits_{a \to +\infty} \int_0^a xf(x)dx$

1er Série de Questions possibles :

1) Déterminer les réels a et b tels que $G(x) = (ax + b)e^{-\lambda x}$ soit une primitive de la fonction $g(x) = xf(x)$
2) Calculer $\int_0^a xf(x)dx$ en fonction de a et λ
3) En déduire la valeur de l'espérance de X en utilisant le théorème des croissances comparées

Démonstration :

1) $G'(x) = ae^{-\lambda x} + (ax + b) \times \left(-\lambda e^{-\lambda x}\right)$
$$= ae^{-\lambda x} - \lambda(ax + b)e^{-\lambda x}$$
$$= e^{-\lambda x}(a - \lambda(ax + b))$$
$$= e^{-\lambda x}(-\lambda ax + a - b\lambda)$$

Si $G'(x) = xf(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$, alors par identification :

$$\begin{cases} -\lambda a = \lambda \\ a - b\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -1 - b\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$$

D'où $G(x) = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}$

2) On a alors : $\int_0^a xf(x)dx = [G(x)]_0^a = G(a) - G(0) = \left(-a - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda a} - \left(-0 - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda \times 0}$
$$= \left(-a - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda}$$

3) On a : $E(X) = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a xf(x)dx$

$$E(X) = \lim_{a\to+\infty} \left(-a - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda}$$

$$= \lim_{a\to+\infty} -ae^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda}$$

$\lambda > 0$ donc $\lim_{a\to+\infty} -ae^{-\lambda a} = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{\lambda} \times (-\lambda a) e^{-\lambda a}$

Or : $\lim_{a\to+\infty} (-\lambda a) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (théorème des croissances comparées). Par composition on a donc : $\lim_{a\to+\infty} (-\lambda a)e^{-\lambda a} = 0$ et donc $\lim_{a\to+\infty} -ae^{-\lambda a} = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{\lambda} \times (-\lambda a)e^{-\lambda a} = 0$

On a ensuite : $\lim_{a\to+\infty} -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a} = 0$ (*car* $\lim_{a\to+\infty} (-\lambda a) = -\infty$ *et* $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$)

D'où par somme : $E(X) = \lim_{a\to+\infty} -ae^{-\lambda a} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda a} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$

<u>2ème Série de Questions possibles (première partie de la démo différente et questions 2 et 3 rassemblées en une seule question) :</u>

1) Considérons la fonction $g(x) = xf(x)$. Calculer g' et en déduire une primitive de g
2) En déduire la valeur de $E(X)$

<u>Démonstration :</u>

1) $g(x) = xf(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$

$$g'(x) = \lambda e^{-\lambda x} + \lambda x \times \left(-\lambda e^{-\lambda x}\right) = \lambda e^{-\lambda x} - \lambda^2 x e^{-\lambda x}$$

On constate que : $g'(x) = \lambda e^{-\lambda x} - \lambda g(x)$

$$\Leftrightarrow \lambda g(x) = \lambda e^{-\lambda x} - g'(x)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} \times g'(x)$$

On en déduite donc une primitive G de g : $G(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} - \frac{1}{\lambda} \times g(x) = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \times \lambda x e^{-\lambda x}$

Soit : $G(x) = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - xe^{-\lambda x} = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}$

2) On a : $E(X) = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a xf(x)dx$

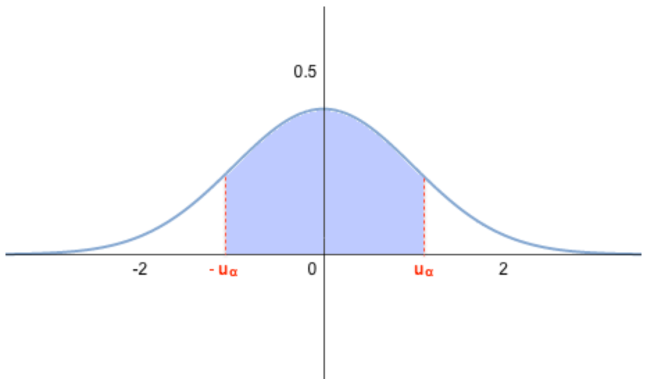
Il suffit de calculer $\int_0^a xf(x)dx$ puis de passer à la limite (voir questions 2 et 3 de la série de questions précédente)

ROC 9 – SEUIL DE PRECISION α POUR LA LOI NORMALE CENTREE REDUITE

Démontrer que pour $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $p(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ lorsque X suit la loi normale $N(0,1)$.

Démonstration :

Soit $\alpha \in]0;1[$, cherchons $t > 0$ tel que : $p(-t \leq X \leq t) = 1 - \alpha$



$$p(-t \leq X \leq t) = 1 - \alpha$$
$$\Leftrightarrow 2p(X \leq t) - 1 = 1 - \alpha$$
$$\Leftrightarrow p(X \leq t) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$
$$\Leftrightarrow \Phi(t) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Φ représente l'aire du domaine sous courbe, à gauche de la droite d'équation $y = t$.

Φ est donc une fonction strictement croissante et continue sur $]0; +\infty[$, avec :

$\lim_{t \to 0} \Phi(t) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{t \to +\infty} \Phi(t) = 1$

Or : $0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{\alpha}{2} < 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < 1 - \frac{\alpha}{2} < 1$$

Ainsi d'après le corollaire du TVI, l'équation $\Phi(t) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ admet une unique solution u_α sur l'intervalle $]0; +\infty[$

ROC 10 – INTERVALLE DE FLUCTUATION ASYMPTOTIQUE

Démontrer que si la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale $B(n,p)$, alors pour tout $\alpha \in]0;1[$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} p\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$$

Où : $I_n = [p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$

__Pré-requis :__

Si X_n suit la loi binomiale $B(n;p)$, alors pour tout $\alpha \in]0;1[$, d'après le théorème de Moivre-Laplace :

$$\lim_{n\to+\infty} p\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right) = 1-\alpha$$

(Où u_α est l'unique solution de $p(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1-\alpha$, avec X variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite)

__Démonstration :__

D'après le théorème de Moivre-Laplace :

$$\lim_{n\to+\infty} p\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} p\left(-u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha\sqrt{np(1-p)}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} p\left(-u_\alpha\sqrt{np(1-p)} + np \leq X_n \leq u_\alpha\sqrt{np(1-p)} + np\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} p\left(\frac{-u_\alpha\sqrt{np(1-p)} + np}{n} \leq \frac{X_n}{n} \leq \frac{u_\alpha\sqrt{np(1-p)} + np}{n}\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} p\left(-u_\alpha \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} + p \leq \frac{X_n}{n} \leq u_\alpha \frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} + p\right) = 1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} p\left(-u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} + p \leq \frac{X_n}{n} \leq u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} + p\right) = 1-\alpha$$

C'est à dire :

$$\lim_{n\to+\infty} p\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1-\alpha$$

Où : $I_n = [p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$

AUTRES DEMONSTRATIONS CITEES DANS LE PROGRAMME

1 – THEOREME DE MAJORATION D'UNE SUITE CROISSANTE ET CONVERGENTE

> Démontrer que si une suite est croissante et admet pour limite l, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l
> *(Si (u_n) est croissante et admet une limite finie l, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq l$)*

__Démonstration :__

2 – THEOREME DE DIVERGENCE D'UNE SUITE CROISSANTE NON MAJOREE

> Démontrer que si une suite est croissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$

__Démonstration :__

3 – THEOREME FONDAMENTALE DU CALCUL INTEGRAL

> Théorème : « Soit f est une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$. La fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et a pour dérivée f. »
> Démontrer ce théorème dans le cas où f est positive et croissante.

__Démonstration :__

4 – TOUTE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE ADMET DES PRIMITIVES

> Théorème : «Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives»
> Démontrer ce théorème dans le cas d'un intervalle fermé borné en admettant qu'une telle fonction admet un minimum.

Démonstration :

5 – THEOREME DU TOIT

Théorème : Lorsqu'un plan P_1 contenant une droite (d_1) est sécant à un plan P_2 contenant une droite (d_2) parallèle à (d_1) alors la droite d'intersection (Δ) de ces deux plans est parallèle à (d_1) et (d_2)

Démonstration :

6 – LOI EXPONENTIELLE - DUREE DE VIE SANS VIEILLISSEMENT

Théorème : Considérons une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $h \in \mathbb{R}^+$: $p_{(X\geq t)}(X \geq t+h) = p(X \geq h)$

Démonstration :

7 – STATISTIQUES – INTERVALLE DE CONFIANCE

Soit X_n une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n,p)$, on note $F_n = \frac{X_n}{n}$
Démontrer que la proportion p appartient à l'intervalle $[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec une probabilité au moins égale à 95%.

Prérequis :

Pour n assez grand, $F_n \in [p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec une probabilité supérieur ou égale à 95%

Démonstration :

On a :

$$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n - p \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} - F_n \leq -p \leq \frac{1}{\sqrt{n}} - F_n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} + F_n \geq p \geq -\frac{1}{\sqrt{n}} + F_n$$

D'où : $p \in [F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}]$ avec une probabilité au moins égale à 95%.