Clamaths.fr

-

Première S

Sommaire

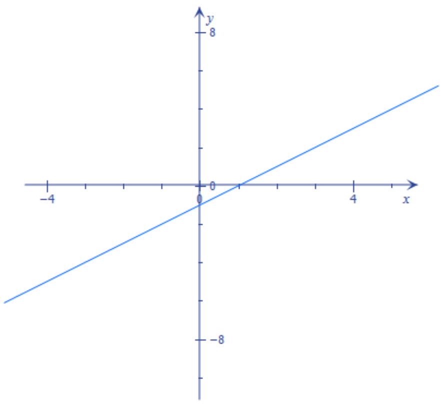
1 FONCIONS AFFINES ET DE DEGRE 2

1.1 FONCTIONS AFFINES - $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$

$ax + b = 0 \;\Leftrightarrow\; ax = -b \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{b}{a}$

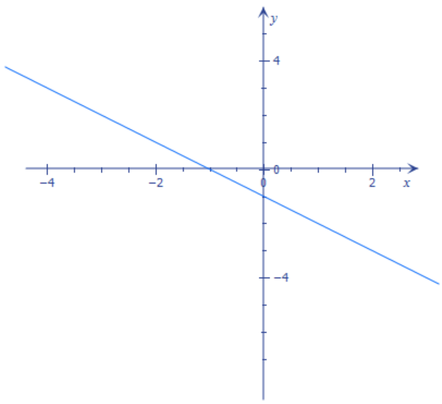
a>0	a<0

a>0



x		$-\frac{b}{a}$	
$f(x)$	-	0	+

a<0



x		$-\frac{b}{a}$	
$f(x)$	+	0	-

1.2 FONCTIONS POLYNOME DE DEGRE 2 - $f(x) = ax^2 + bx + c$

RESOLUTION DE L'EQUATION : $AX^2 + BX + C = 0$

Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

Si $\Delta < 0$: Aucune racine (pas de solution à l'équation) -> Pas de forme factorisée

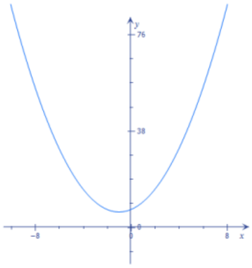
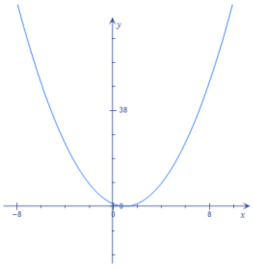
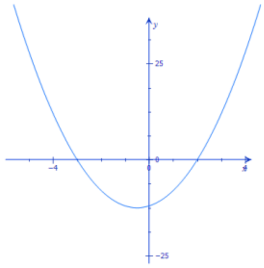
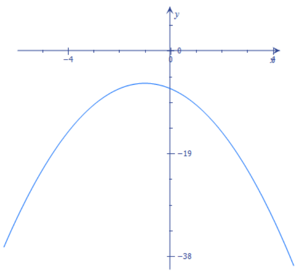
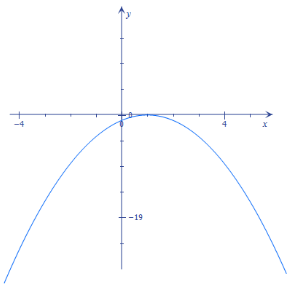
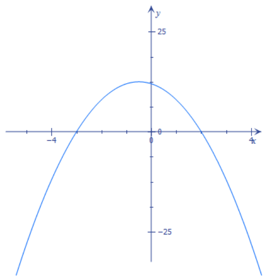
Si $\Delta = 0$: 1 racine (solution de l'équation) : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

Forme factorisée : $\boxed{f(x) = a(x - x_0)^2}$

Si $\Delta > 0$: 2 racines (solutions de l'équation) : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Forme factorisée : $\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$

SIGNE DE $F(X) = AX^2 + BX + C$

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
a>0	 *x* *f(x)* | +	 *x* | x_0 *f(x)* | + | 0 | +	 *x* | x_1 | x_2 *f(x)* | + | 0 | - | 0 | +
a<0	 *x* *f(x)* | -	 *x* | x_0 *f(x)* | - | 0 | -	 *x* | x_1 | x_2 *f(x)* | - | 0 | + | 0 | -

2 SUITES

2.1 SUITES ARITHMETIQUES ET SUITES GEOMETRIQUES

	Suites Arithmétiques	*Suites Géométriques*
Forme récurrente	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Forme explicite	$u_n = u_0 + n \times r$ Attention, si u_1 premier terme : $u_n = u_1 + (n-1) \times r$	$u_n = u_0 \times q^n$ Attention, si u_1 premier terme : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
Formule générale	$u_n = u_p + (n-p) \times r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$

Pour montrer qu'une suite est Arithmétique, il suffit de calculer $u_{n+1} - u_n$ et de montrer que le résultat est égal à une constante.

Pour montrer qu'une suite est Géométrique, il suffit de calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et de montrer que le résultat est égal à une constante.

Pour montrer qu'une suite n'est ni Arithmétique ni Géométrique, il suffit de montrer que respectiveent que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et que $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$

2.2 SENS DE VARIATION

Soit (u_n) une suite définie pour $n \in \mathbb{N}$:

$$(u_n)\ \text{est croissante} \Leftrightarrow u_n \leq u_{n+1}$$

$$(u_n)\ \text{est décroissante} \Leftrightarrow u_n \geq u_{n+1}$$

Méthode pour déterminer les variations d'une suite :

On calcule $u_{n+1} - u_n$:

$$=> Si\ u_{n+1} - u_n \geq 0\ alors\ (u_n)\ est\ croissante.$$

$$=> Si\ u_{n+1} - u_n \leq 0\ alors\ (u_n)\ est\ décroissante.$$

Autre méthode :

- Si $u_n > 0$, alors :
  - Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Leftrightarrow (u_n)$ *est croissante*
  - Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Leftrightarrow (u_n)$ *est décroissante*
- Si $u_n < 0$, alors :
  - Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \Leftrightarrow (u_n)$ *est décroissante*
  - Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Leftrightarrow (u_n)$ *est croissante*

2.3 SOMME DES TERMES

2.3.1 Somme des termes d'une suite Arithmétique

Cas particulier :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad avec\ n \in \mathbb{N}$$

Cas Général :

$$S = (nombre\ de\ termes) \times \frac{1^{er}\ terme + dernier\ terme}{2}$$

2.3.2 Somme des termes d'une suite Géométrique

Cas particulier :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad avec\ q \in \mathbb{R}$$

Cas Général :

$$S = (1^{er}\ terme) \times \frac{1 - raison^{nombre\ de\ termes}}{1 - raison}$$

2.4 LIMITES

Soit $q \in \mathbb{R}$:

- $Si\ \ -1 < q < 1\,,\ alors\ \ \lim_{n \to +\infty} q^n = 0$
- $Si\ \ q > 1\,,\qquad alors\ \ \lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- $Si\ \ q \leq -1\,,\qquad alors\ \ q^n\ n'admet\ pas\ de\ limite$
- $Si\ \ q = 1\,,\qquad alors\ \ \lim_{n \to +\infty} q^n = 1$

2.5 EXO-TYPE : SUITES ARITHMETICO-GEOMETRIQUE (CENTRES ETRANGERS - 2010)

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année (2010 + *n*). En 2010, la forêt possède 50 000 arbres. Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par :
   $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel *n* par la relation : $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3$
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = 60 - u_n$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.
   b. Calculer $v0$. Déterminer l'expression de v_n en fonction de *n*.
   c. Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $u_n = 60 - 10 \times (0{,}95)^n$.
3. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2015. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.
4.
   a. Vérifier que pour tout entier naturel *n*, on a l'égalité $u_{n+1} - u_n = 0{,}5 \times (0{,}95)^n$.
   b. En déduire la monotonie de la suite.
5. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres de la forêt en 2010.
6. Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter.

Correction :

1. u_n désigne le nombre d'arbres, en millier de l'année $(2010 + n)$, on peut donc noter :
   $$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) + 3$$
   En effet, le nombre d'arbre diminuant de 5% d'une année à l'autre, cela revient à multiplier u_n par $1 - \frac{5}{100}$, et pour tenir compte des 3000 arbres replantés chaque année, il suffit de faire « +3 » car u_n est exprimé en milliers.
   <u>On a donc</u> : $\boxed{u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3}$

2.
   a. On a $v_n = 60 - u_n$ et donc également : $u_n = 60 - v_n$
   Pour montrer que (v_n) est géométrique il faut montrer qu'il existe un réel $q \in \mathbb{R}$ tel que : $v_{n+1} = q \times v_n$
   Méthode 1 :
   On part donc de :
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= 60 - u_{n+1} \\ &= 60 - (0{,}95u_n + 3) \\ &= 60 - 0{,}95u_n - 3 \\ &= 57 - 0{,}95u_n \\ &= 0.95\left(\frac{57}{0.95} - u_n\right) \quad \text{(on factorise par 0.95)} \\ &= 0.95(60 - u_n) \\ &= 0.95v_n \end{aligned}$$
   <u>Donc v_n est une suite géométrique de raison 0.95</u>

Méthode 2 :

On part donc de :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 60 - u_{n+1} \\ &= 60 - (0{,}95u_n + 3) \\ &= 60 - 0{,}95u_n - 3 \\ &= 57 - 0{,}95u_n \\ &= 57 - 0.95(60 - v_n) \\ &= 57 - 57 + 0.95v_n \\ &= 0.95v_n \end{aligned}$$

<u>Donc v_n est une suite géométrique de raison 0.95</u>

b. D'après la formule $v_n = 60 - u_n$, on a :

$$v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10$$

Ainsi (v_n) étant une suite géométrique on :

$v_n = v_0 \times q^n$

$\boxed{v_n = 10 \times 0.95^n}$

c. On sait que $v_n = 60 - u_n$

Donc :

$$u_n = 60 - v_n$$
$$\boxed{u_n = 60 - 10 \times 0.95^n}$$

3. $u_5 = 60 - 10 \times 0.95^5 = 52.262$

<u>Le nombre d'arbres en 2015 sera donc de 52262 arbres.</u>

4.

a. On a : $u_n = 60 - 10 \times 0.95^n$

Donc $u_{n+1} = 60 - 10 \times 0.95^{n+1}$

Calculons $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 60 - 10 \times 0.95^{n+1} - (60 - 10 \times 0.95^n) \\ &= 60 - 10 \times 0.95^{n+1} - 60 + 10 \times 0.95^n \\ &= -10 \times 0.95^{n+1} + 10 \times 0.95^n \\ &= -10 \times 0.95^n \times 0.95^1 + 10 \times 0.95^n \\ &= 0.95^n(-10 \times 0.95^1 + 10) \\ &= 0.95^n \times (0.5) \end{aligned}$$

b. On constate que $0.95^n \times (0.5) > 0$ car $0.95^n > 0$ et $0.5 > 0$

On peut donc en déduire que $u_{n+1} - u_n > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$

<u>La suite u_n est donc strictement croissante.</u>

5. On cherche n tel que :

$$u_n \geq u_0 + \frac{10}{100} \times u_0$$
$$\Leftrightarrow u_n \geq 50 + 0.1 \times 50$$
$$\Leftrightarrow u_n \geq 55$$
$$\Leftrightarrow 60 - 10 \times 0.95^n \geq 55$$

$$\Leftrightarrow -10 \times 0.95^n \geq -5$$

$$\Leftrightarrow 0.95^n \leq \frac{-5}{-10}$$ (Attention ! On change le sens de l'inégalité car on divise par un nombre négatif)

$$\Leftrightarrow 0.95^n \leq 0.5$$

On rentre la fonction 0.95^x dans la calculatrice, puis on regarde le tableau de valeur en commençant à $x = 0$ avec un pas de 1. Il suffit d'observer quand la valeur de y devient plus petite que 0,5, on trouve ainsi :

$$n \geq 14$$

Donc le nombre d'arbres dépassera 55000 arbres au bout de 14 années, c'est-à-dire en 2024.

6. $\lim\limits_{n \to +\infty} 0.95^n = 0$ car $0 \leq 0.95 \leq 1$

   Ainsi : $\lim\limits_{n \to +\infty} 10 \times 0.95^n = 10 \times 0 = 0$

   Et : $\lim\limits_{n \to +\infty} 60 - 10 \times 0.95^n = 60 - 0 = 60$

   Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 60$$

   On peut donc en déduire qu'à long terme, la forêt tendra vers 60000 arbres.

3 DERIVEES

3.1 DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est dérivable en a si et seulement si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. On note alors : $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

3.2 EQUATION DE LA TANGENTE

Si f est dérivable en a alors :

- **$f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisses a**
- L'équation de la tangente au point d'abscisse a est :

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

En particulier : si $f'(a) = 0$, alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

3.3 UTILITE DE LA DERIVEE

Comme dit précédemment, la dérivée en un point d'abscisse a est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point. Ainsi la dérivée représente la pente de la courbe C_f ce qui se traduit par les propriétés suivantes :

- $f'(x) > 0 \; sur \; I \Leftrightarrow f \; est \; croissante \; sur \; I$
- $f'(x) < 0 \; sur \; I \Leftrightarrow f \; est \; décroissante \; sur \; I$

3.4 TABLEAU DES DERIVEES

Fonction	Dérivée
a	0
$ax + b$	a
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x} \quad pour \; x \in [0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

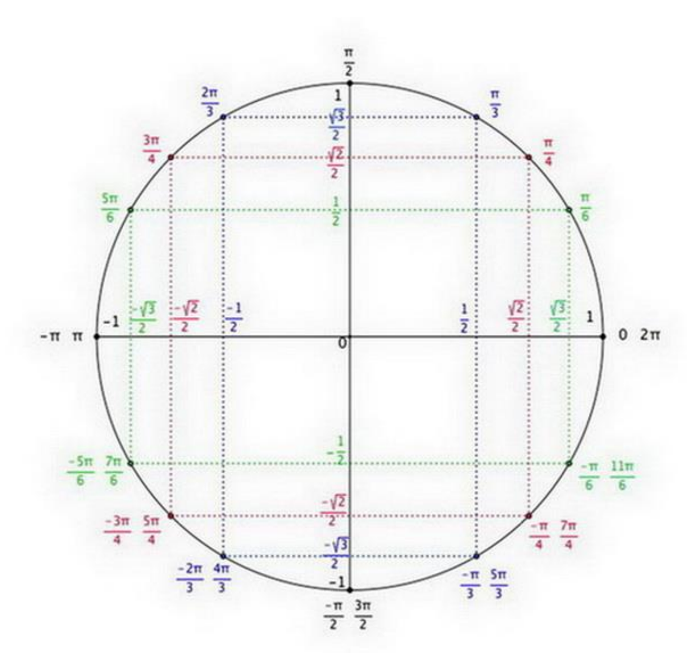
Soit u et v 2 fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Et k une constante appartenant à $\mathbb{R}$.

Fonction	Dérivée
ku	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
u^2	$2u'u$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

4 TRIGONOMETRIE

4.1 CERCLE TRIGONOMETRIQUE

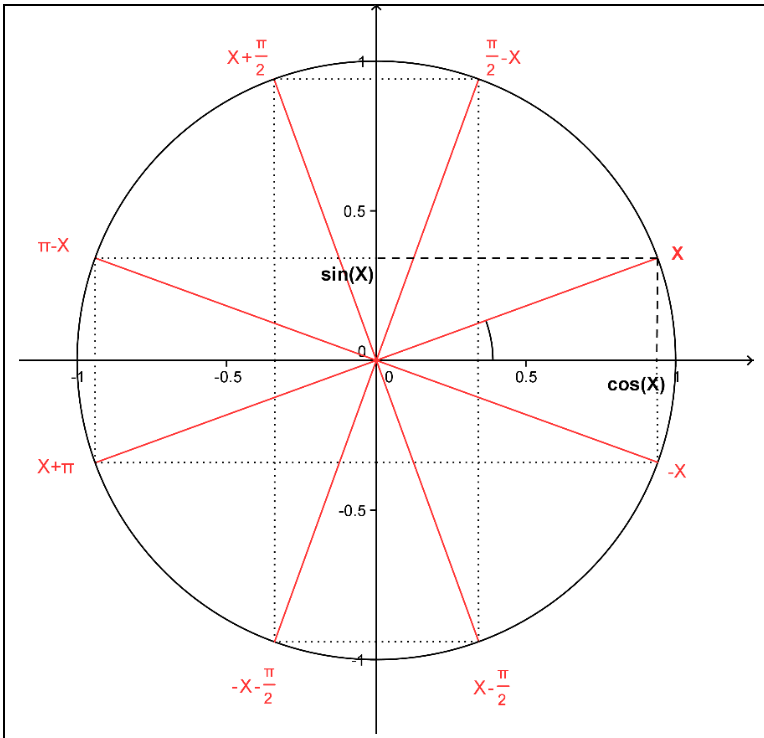


t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	1
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

4.2 ANGLES ASSOCIES



Les formules suivantes se retrouvent à l'aide du cercle trigonométrique :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

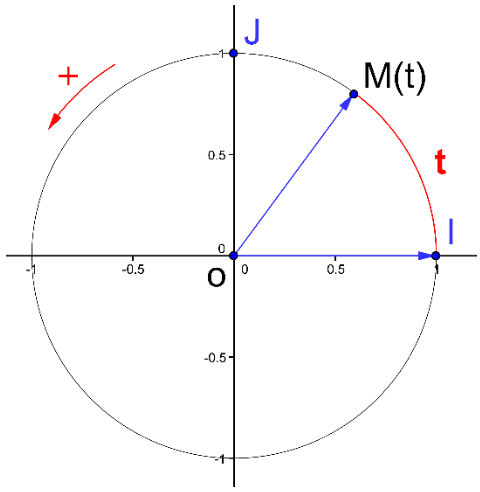
4.3 Angles orientes

- Sur un cercle trigonométrique :
- A tout nombre t on associe un point M unique
- Si un point M est associé à un nombre t, alors il est aussi associé à tout nombre t' tel que :

$$t' = t + 2k\pi \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}$$

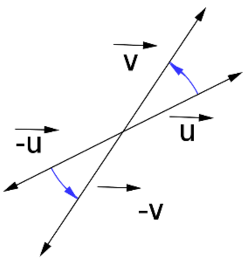
- Chacun de ces nombres est une mesure, en radian, de l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$

- Parmi toutes ces mesures, il en existe une unique appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$. Cette mesure est appelée mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$



Propriétés sur les angles orientés :

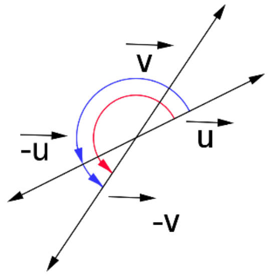
$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$



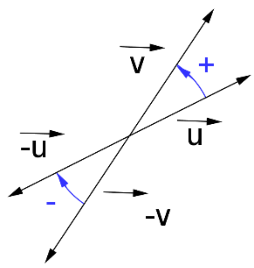
$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$

&

$(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi$



$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$



- Si k et k' sont 2 réels de même signe :
$(k\vec{u}, k'\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

- Si k et k' sont 2 réels de signes contraires :
$(k\vec{u}, k'\vec{v}) = -(\vec{u}, \vec{v})$

Relation de Chasles sur les angles orientés :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v})$$

4.4 Resolution d'equations et d'inequations

4.4.1 Equations trigonométrique

$$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow \begin{array}{c} x = a + 2k\pi \\ ou \\ x = -a + 2k\pi \end{array} \quad ; \quad \sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \quad avec\ k \in \mathbb{Z}$$

On peut aisément retrouver ces propriétés à l'aide d'un cercle trigonométrique

Exemple 1 :

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
2) Donner les solutions sur $]-\pi; \pi]$
3) Donner les solutions sur $]0; 2\pi]$

Correction :

1) $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) = \cos(\frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \quad avec\ k \in \mathbb{Z}$

2) En remplaçant k par 0 on trouve 2 solutions dans $]-\pi;\pi]$: $S = \{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\}$

3) En remplaçant k par 0, on a : $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4}$

   En remplaçant k par 1, on obtient : $x = \frac{9\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

   Les solutions sur $]0; 2\pi]$ sont donc : $S = \{\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\}$

Exemple 2 :

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(2x) = \frac{1}{2}$
2) Donner les solutions sur $]-\pi;\pi]$
3) Donner les solutions sur $]0; 2\pi]$

Correction :

1) $\text{Sin}(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \quad ou \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \quad avec\ k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \quad ou \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad avec\ k \in \mathbb{Z}$$

2) Pour $k = -1$, on a : $x = -\frac{11\pi}{12}$ ou $x = -\frac{7\pi}{12}$

   Pour $k = 0$, on a : $x = \frac{\pi}{12}$ ou $x = \frac{5\pi}{12}$

   Pour $k = 1$, on a : $x = \frac{13\pi}{12}$ ou $x = \frac{17\pi}{12}$

   Il y a donc 4 solutions sur $]-\pi;\pi]$: $S = \{-\frac{11\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12}; \frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}\}$

3) Les solutions sur $]0; 2\pi]$ sont donc : $S = \{\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{12}; \frac{13\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}\}$

Exemple 3 :

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sin(2x) = \cos(x)$
2) Donner les solutions sur $]-\pi;\pi]$
3) Donner les solutions sur $]0; 2\pi]$

Correction :

1) $\sin(2x) = \cos(x) \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ \quad ou \\ 2x = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) + 2k\pi \end{cases} \quad avec\ k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad avec\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \\ \quad ou \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad avec\ k \in \mathbb{Z}$$

2) Pour $k = -2$, on a : $x = -\frac{7\pi}{6}$ ou $x = -\frac{3\pi}{2}$
   Pour $k = -1$, on a : $x = -\frac{\pi}{2}$ ou $x = -\frac{\pi}{2}$
   Pour $k = 0$, on a : $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{2}$
   Pour $k = 1$, on a : $x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$
   Pour $k = 2$, on a : $x = \frac{3\pi}{2}$ ou $x = \frac{5\pi}{2}$
   Il y a donc 3 solutions sur $]-\pi;\pi]$: $S = \{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\}$
3) Et sur $]0; 2\pi]$: $S = \{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\}$

4.4.2 Inéquations trigonométrique

Il suffit de s'aider du cercle trigonométrique.

Voici des exemples (exos 5, 6, 7 et 8) : http://www.rosamaths.fr/labowp/wp-content/uploads/2013/09/Site-fonctions-trigonom%C3%A9triques-corrige.pdf

5 PROBABILITES

5.1 CALCULS DE PROBABILITES ET VARIABLE ALEATOIRE

Soit A et B deux évènements de l'univers Ω

$p(A) = \dfrac{nombre\ d'issues\ de\ A}{nombre\ d'issues\ total}$	$0 \leq p(A) \leq 1$
$p(A) = 1 - p(\bar{A})$	$p(AUB) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Soit X une variable aléatoire avec $X \in \{x_1; x_2; \dots; x_k\}$

Donner la loi de probabilité de X c'est associer à chaque issue de X sa probabilité :

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_k

<u>Espérance :</u> $E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i \times p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_k \times p_k$

$E(aX + b) = a \times E(X) + b$

<u>Variance :</u> $V(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i\left(x_i - E(X)\right)^2 = p_1\left(x_1 - E(X)\right)^2 + p_2\left(x_2 - E(X)\right)^2 + \cdots + p_k\left(x_k - E(x)\right)^2$

$V(aX + b) = a^2 \times V(X)$

<u>Ecart-type :</u> $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Avec la calculatrice

TI : stats -> Edit... -> « Dans L1 rentrer les x_i et dans L2 les p_i »

Puis faire : stat -> CALC -> 1-Var Stats L1,L2

5.2 LOI BINOMIALE

Schéma de Bernoulli et Loi Binomiale

- Une <u>épreuve de Bernoulli</u> est une expérience aléatoire à 2 issues : « succès » ou « échec », le paramètre p de la loi de Bernoulli est la probabilité de « succès ».
- Un <u>schéma de Bernoulli</u> de paramètre n et p est une succession n épreuves de Bernoulli (de paramètre p) réalisées de manières identiques et indépendantes.
- Dans un schéma de Bernoulli, si l'on note X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès à l'issue des n épreuves, alors on X suit la <u>Loi Binomiale</u> de paramètres n et p. On note souvent $X \rightsquigarrow B(n, p)$. On a alors pour tout tout entier $k \in [1; n]$:

$$\boxed{p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1 - p)^{n-k}}$$

Rédaction type

L'expérience consiste à répéter … fois de manière identique et indépendante une même épreuve de Bernoulli de succès : « ….. » et de paramètre $p = \cdots$, soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès. $X \leadsto B(\dots, \dots)$

Calculatrice

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre $B(n, p)$

	$p(X = k)$	$p(X \leq k)$
TI	2nde -> var -> $\boldsymbol{BinomFdp(n, p, k)}$ Ou « Binompdf »	2nde -> var -> $\boldsymbol{BinomFrép(n, p, k)}$ Ou « Binomcdf »
Casio	OPTN -> STAT –> DIST -> BINM -> $\boldsymbol{Bpd(k, n, p)}$	OPTN -> STAT –> DIST -> BINM -> $\boldsymbol{Bcd(k, n, p)}$
Lien	http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/lycee2010/calculatrices/loi_binomiale_et_calculatrice.pdf	

Exercice type (Reunion – Juin 2008)

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0, 1.

On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

1) Justifier que X suit une loi binomiale et donner les paramètres de cette loi.
2) Calculer la probabilité des événements suivants :
   A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;
   B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;
   C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».
   D : « il y a 4 stylos ou plus présentant un défaut ».

Correction :

1) L'expérience consiste à répéter 8 fois de manière identique et indépendante une même épreuve de Bernoulli de succès : « le stylos présente un défaut » et de paramètre $p = 0.1$, soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de succès. X suit la loi binomiale de paramètre $n = 8$ et $p = 0.1$
2) $p(A) = p(X = 0) = 0.9^8 \simeq 0.43$
   $p(B) = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,98 = 0,57$
   $p(C) = p(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0.1^2 \times 0.9^6 \simeq 0.15$ (avec la calculatrice)
   $p(D) = p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3) \simeq 1 - 0.99 \simeq 0.01$ (avec la calculatrice)

6 RAPPELS SUR QUELQUES REGLES DE CALCUL (NIVEAU COLLEGE !)

Les Evidences de l'associativité (mais il faut penser à l'utiliser !) :

$a+b=b+a$	$a\times b=b\times a$
$a+b+c=c+b+a=b+c+a$	$a\times b\times c=b\times c\times a=c\times a\times b$
$A=B\Leftrightarrow B=A$	$A\leq B\Leftrightarrow B\geq A$

Règles basiques de calculs :

$a=\frac{a}{1}$	$\frac{a}{a}=1$	$\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$	
$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$	$a\times\frac{b}{c}=\frac{a}{c}\times b=\frac{a\times b}{c}$	
	$\frac{k\times a+b}{k\times c}\neq\frac{a+b}{c}$	On ne barre pas les k dans ce cas là !!!	
$\frac{k\times a}{k\times b}=\frac{\cancel{k}\times a}{\cancel{k}\times b}=\frac{a}{b}$	$\frac{\cancel{k}\times(a+b)}{\cancel{k}\times c}=\frac{a+b}{c}$	Ici par contre on peux les barrer !	

La double fraction :

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$	$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}$	$\frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{c}}=a\times\frac{c}{b}$

Attention aux signes :	$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}\neq\frac{-a}{-b}$	$-(a\times b)=(-a)\times b=a\times(-b)\neq(-a)\times(-b)$

Exemples de Factorisations :	$k\times a+k\times b=k(a+b)$	$k\times a+k\times b+k\times c=k(a+b+c)$
	$k\times a-b\times k\times c=k(a-b\times c)$	
	$-3ka^2+8k(a+b)-2k^2c+k=k[-3a^2+8(a+b)-2kc+1]$	

Distributivité :	$k(a+b)=k\times a+k\times b$

	$-(a+b)=-a-b$	$-(a-b)=-a+b$	$-(-a-b)=a+b$

Transformer une expression :	$-a+b=-(a-b)$	$\frac{-a-b}{-c}=\frac{a+b}{c}$	$\frac{-a+b}{-c}=\frac{a-b}{c}$

Puissances :	$a^0=1$	$a^1=a$	$a^n \times a^m=a^{n+m}$
	$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$	$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$	$(a^n)^m=a^{nm}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$	$(ab)^n=a^n \times b^n$	$a \times b^n \neq (a \times b)^n$	 ATTENTION !!!

Un nombre négatif élevé à une puissance paire est positif !

Exemples : $(-3)^{24}=3^{24}$

Un nombre négatif élevé à une puissance paire est positif !

Exemples : $(-3)^{25}=-3^{25}$

Racines carrées :	$\sqrt{x \times y}=\sqrt{x} \times \sqrt{y}$	$\sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$
	$\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x}+\sqrt{y}$ ATTENTION !!!	$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

Identités remarquables :	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Règle fondamentale sur les inéquations : Multiplier ou diviser les 2 membres d'une inéquation par un nombre négatif change le sens de l'inégalité.

Exemple : $x \leq y \Leftrightarrow -3x \geq -3y$