# Clamaths.fr

## SOMMAIRE



## EXERCICE 1 – METTRE SOUS FORME ALGEBRIQUE UNE EXPRESSION SIMPLE

Donner la forme algébrique des nombres complexe :

$z_1 = 3(4i-7)-2(-3+2i)$ ; $z_2 = (2+i)^2$ ; $z_3 = (5-2i)(2i+8)i$

$z_4 = \frac{3}{i}$ ; $z_5 = \frac{3}{1-i}$ ; $z_6 = \frac{-2+3i}{-5-3i}$ ; $z_7 = \frac{-17-3i}{-53i}$ ;

$z_8 = \frac{(3+2i)(4-i)}{2-2i}$

### CORRECTION

Donner la forme algébrique des nombres complexe :

$z_1 = 3(4i-7)-2(-3+2i)$

$z_1 = 12i-21+6-4i = 8i-15$

$z_2 = (2+i)^2$

$z_2 = 4 + 4i + i^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$

$z_3 = (5-2i)(2i+8)i$

$z_3 = (10i + 40 - 4i^2 - 16i)i = -10 + 40i + 4i + 16 = 6 + 44i$

$z_4 = \frac{3}{i}$

$z_4 = \frac{3i}{i^2} = \frac{(3i)}{-1} = -3i$

$z_5 = \frac{3}{1-i}$

$z_5 = \frac{3(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3+3i}{1-i^2} = \frac{3+3i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$

$z_6 = \frac{-2+3i}{-5-3i}$

$z_6 = \frac{(-2+3i)(-5+3i)}{(-5-3i)(-5+3i)} = \frac{10-6i-15i-9}{25-9i^2} = \frac{1-21i}{34} = \frac{1}{34} - \frac{21}{34}i$

$z_7 = \frac{-17-3i}{-53i}$

$z_7 = \frac{(-17-3i)i}{-53i^2} = \frac{-17i+3}{53} = -\frac{17}{53} - \frac{3}{53}i$

$z_8 = \frac{(3+2i)(4-i)}{2-2i}$

$z_8 = \frac{(3+2i)(4-i)(1+i)}{2(1-i)(1+i)} = \frac{(12-3i+8i+2)(1+i)}{2(1-i^2)} = \frac{(14+5i)(1+i)}{2\times 2} = \frac{9+19i}{4} = \frac{9}{4} + \frac{19}{4}i$

# EXERCICE 2 - EQUATIONS, DIFFERENTES METHODES DE RESOLUTION

A) Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes (il suffit d'isoler z) :

1) $z-2=3i-2z-4$
2) $z-9=\frac{3iz+2}{2}$
3) $z-9i=\frac{3iz+2}{2+5i}$
4) $i(3iz-4)=3(-2z+i)$
5) $i(3iz-4)=(3z-4i+1)(-2+i)$
6) $4-9i=\frac{6iz+2}{2z+5i}$

B) Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes (il suffit de factoriser, puis équation produit nul) :

1) $(z-2i+3)(3iz-1)=3z(3iz-1)$
2) $2z\bar{z}=(3i-2)\bar{z}$
3) $(4+3i+\bar{z})(2z-2)=-3(z+3i)(4+3i+\bar{z})$

C) Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes (il faut poser $z=x+iy$) :

1) $z+2\bar{z}=8-3i$
2) $z\bar{z}+2\bar{z}=8-3i\bar{z}$

## CORRECTION

A) Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes (il suffit d'isoler z) :

| | |
|---|---|
| 1) $z-2=3i-2z-4$<br>$z-2=3i-2z-4 \Leftrightarrow z+2z=3i-4+2$<br>$\Leftrightarrow 3z=3i+2$<br>$\Leftrightarrow z=\frac{3i+2}{3}$<br>$\Leftrightarrow z=i+\frac{2}{3}$ | 2) $z-9=\frac{3iz+2}{2}$<br>$z-9=\frac{3iz+2}{2} \Leftrightarrow 2(z-9)=3iz+2$<br>$\Leftrightarrow 2z-18-3iz=2$<br>$\Leftrightarrow z(2-3i)=20 \Leftrightarrow z=\frac{20}{2-3i}$<br>$\Leftrightarrow z=\frac{20(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} \Leftrightarrow z=\frac{40+60i}{13}$<br>$\Leftrightarrow z=\frac{40}{13}+\frac{60}{13}i$ |

| | |
|---|---|
| 3) $z-9i=\frac{3iz+2}{2+5i}$<br><br>$z-9i=\frac{3iz+2}{2+5i} \Leftrightarrow (z-9i)(2+5i)=3iz+2$<br>$\Leftrightarrow 2z+5iz-18i+45=3iz+2$<br>$\Leftrightarrow 2z+2iz=-43+18i$<br>$\Leftrightarrow 2z(1+i)=-43+18i$<br>$\Leftrightarrow z=\frac{-43+18i}{2(1+i)}=\frac{(-43+18i)(1-i)}{2(1+i)(1-i)}$<br>$\Leftrightarrow z=\frac{-43+43i+18i+18}{4}$<br>$\Leftrightarrow z=-\frac{25}{4}+\frac{61}{4}i$ | 4) $i(3iz-4)=3(-2z+i)$<br><br>Solution : $z=\frac{7}{3}i$<br>5) $i(3iz-4)=(3z-4i+1)(-2+i)$<br><br>Solution : $z=-\frac{11}{6}+\frac{15}{6}i$<br>6) $4-9i=\frac{6iz+2}{2z+5i}$<br><br>Solution : $z=\frac{17}{80}-\frac{149}{80}i$<br>(Astuce : pour éviter des calculs énormes, pensez à factoriser lorsque c'est possible) |

B) Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes (il suffit de factoriser, puis équation produit nul) :

1) $(z-2i+3)(3iz-1)=3z(3iz-1)$
2) $2z\bar{z}=(3i-2)\bar{z}$
3) $(4+3i+\bar{z})(2z-2)=-3(z+3i)(4+3i+\bar{z})$

| | |
|---|---|
| 1) $(z-2i+3)(3iz-1)=3z(3iz-1)$<br><br>$(z-2i+3)(3iz-1)=3z(3iz-1)$<br>$\Leftrightarrow (z-2i+3)(3iz-1)-3z(3iz-1)=0$<br>$\Leftrightarrow (3iz-1)[(z-2i+3)-3z]=0$<br>$\Leftrightarrow (3iz-1)(-2z-2i+3)=0$<br>$\Leftrightarrow (3iz-1)=0$ ou $(-2z-2i+3)=0$<br>$\Leftrightarrow z=\frac{1}{3i}$ ou $z=\frac{-3+2i}{-2}$<br>$\Leftrightarrow z=-\frac{1}{3}i$ ou $z=\frac{3}{2}-i$ | 2) $2z\bar{z}=(3i-2)\bar{z}$<br><br>$2z\bar{z}=(3i-2)\bar{z} \Leftrightarrow 2z\bar{z}-(3i-2)\bar{z}=0$<br>$\Leftrightarrow \bar{z}[2z-(3i-2)]=0$<br>$\Leftrightarrow \bar{z}[2z-3i+2]=00$<br>$\Leftrightarrow \bar{z}=0$ ou $2z-3i+2=0$<br>$\Leftrightarrow z=0$ ou $z=-1+\frac{3}{2}i$ |

3) $(4+3i+\bar{z})(2z-2) = -3(z+3i)(4+3i+\bar{z})$

$(4+3i+\bar{z})(2z-2) = -3(z+3i)(4+3i+\bar{z})$

$\Leftrightarrow (4+3i+\bar{z})(2z-2) + 3(z+3i)(4+3i+\bar{z}) = 0$

$\Leftrightarrow (4+3i+\bar{z})[(2z-2)+3(z+3i)] = 0 \Leftrightarrow (4+3i+\bar{z})(5z-2+9i) = 0$

$\Leftrightarrow (4+3i+\bar{z}) = 0 \quad \text{ou} \quad (5z-2+9i) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -4-3i \quad \text{ou} \quad z = \frac{2-9i}{5}$

$\Leftrightarrow z = -4+3i \quad \text{ou} \quad z = \frac{2}{5} - \frac{9}{5}i$

C) Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes (il faut poser $z = x + iy$) :

1) $z + 2\bar{z} = 8 - 3i$

2) $z\bar{z} + 2\bar{z} = 8 - 3i\bar{z}$

| | |
|---|---|
| 1) $z + 2\bar{z} = 8 - 3i$<br><br>$z + 2\bar{z} = 8 - 3i$<br>$\Leftrightarrow \quad x + iy + 2(x - iy) = 8 - 3i$<br>$\Leftrightarrow \quad 3x - iy = 8 - 3i$<br>$\Leftrightarrow \quad 3x = 8 \quad \text{ou} \quad -y = -3$<br>$\Leftrightarrow \quad x = \frac{8}{3} \quad \text{ou} \quad y = 3$<br>On a donc : $z = \frac{8}{3} + 3i$ | 2) $z\bar{z} + 2\bar{z} = 8 - 3i\bar{z}$<br><br>Soit $M(x;y)$ le point associé à l'affixe $z = x + iy$.<br>$z\bar{z} + 2\bar{z} = 8 - 3i\bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad (x+iy)(x-iy) + 2(x-iy) = 8 - 3i(x-iy)$<br>$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x - 2iy = 8 - 3ix - 3y$<br>$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x + 3y - 8 + i(-2y + 3x) = 0$<br>$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x + 3y - 8 = 0 \quad \text{et} \quad -2y + 3x = 0$<br>L'ensemble des points M vérifiant l'équation $z\bar{z} + 2\bar{z} = 8 - 3i\bar{z}$ correspond à l'ensemble des points vérifiant :<br>$x^2 + y^2 + 2x + 3y - 8 = 0 \quad \text{et} \quad -2y + 3x = 0$<br>La seconde équation nous donne : $y = \frac{3}{2}x$<br>En remplaçant dans la première on obtient :<br>$x^2 + (\frac{3}{2}x)^2 + 2x + 3 \times \frac{3}{2}x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 8 = 0$<br>On calculant le discriminant on trouve $\Delta = \frac{3}{2} \times \sqrt{41}$<br>On trouve ainsi 2 valeurs $x_1 = \frac{-7-3\sqrt{41}}{10}$ et $x_2 = \frac{-7+3\sqrt{41}}{10}$<br>En remplaçant ensuite avec l'équation $y = \frac{3}{2}x$ on obtient ainsi les coordonnées des 2 points solution de l'équation. |

## EXERCICE 3 – PASSER DE LA FORME ALGEBRIQUE A LA FORME TRIGONOMETRIQUE ET INVERSEMENT

A) Placer sur un graphique les points associés aux affixes suivantes et déterminer (sans calculs) leur forme trigonométrique (ou exponentielle) :

1. $z_A = 2i$
2. $z_B = -4$
3. $z_C = -3i$
4. $z_D = \sqrt{3}$

B) Déterminer la forme trigonométrique (ou exponentielle) des complexes suivants :

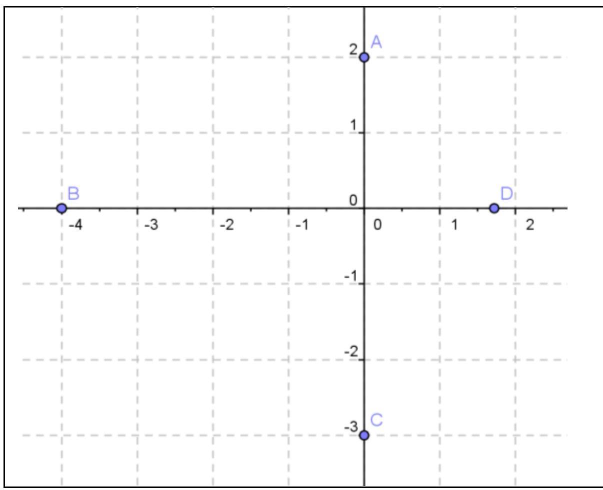
1. $z_E = 3 + 3i\sqrt{3}$
2. $z_F = 2 - 2i$
3. $z_G = \frac{3}{1-i}$
4. $z_H = (1 - i\sqrt{3})(1 + i)$

C) Mettre sous forme algébrique les complexes suivants :

1. $z_I = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
2. $z_J = 4e^{3i\frac{\pi}{2}}$

### CORRECTION

A)




- $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ( $|z_A| = 2$ *et* $Arg(z_A) = \frac{\pi}{2}$ )
- $z_B = 4e^{i\pi}$ ( $|z_B| = 4$ *et* $Arg(z_B) = \pi$ )
- $z_C = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ( $|z_C| = 3$ et $Arg(z_C) = -\frac{\pi}{2}$ )
- $z_D = \sqrt{3}e^{i0}$ ( $|z_D| = \sqrt{3}$ et $Arg(z_D) = 0$ )

B) Déterminer la forme trigonométrique (ou exponentielle) des complexes suivants :

1. $z_E = 3 + 3i\sqrt{3}$

$$|z_E| = \sqrt{3^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9 + 9 \times 3} = \sqrt{36} = 6$$

Notons, $\theta_E = Arg(z_E)$, on a :

$$\cos(\theta_E) = \frac{x_E}{|z_E|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_E) = \frac{y_E}{|z_E|} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

D'où, en observant le cercle trigonométrique : $\theta_E = \frac{\pi}{3}$

On a ainsi : $z_E = 6[\cos(\theta_E) + isin(\theta_E)] = 6e\hat{}(i\frac{\pi}{3})$

2. $z_F = 2 - 2i$

## EXERCICE 4 – REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

1) Donner sous forme algébrique les affixes des points A, B, C, E, G et H

2) Donner, par lecture graphique, la forme trigonométrique (ou exponentielle) des affixes des points B, E, G. Essayer aussi avec A.

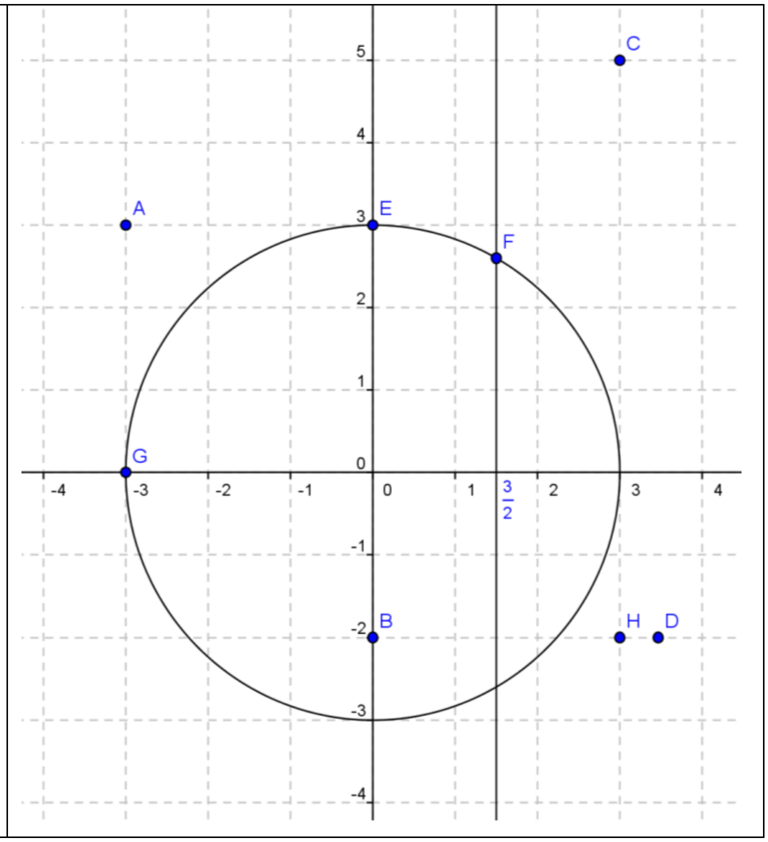
3) Donner, par le calcul, lorsque c'est possible, la forme trigonométrique (ou exponentielle) des affixes des points A, D ($z_D = 2\sqrt{3} - 2i$), F et C.

4) Placer les points I, J, K, L, M, N, d'affixes respectives :

$$z_I = -1 + i \;\; ; \;\; z_J = \frac{5}{2}i - 3 \;\; ; \;\; z_K = -2 - 2\sqrt{3}$$

$$z_L = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \;\; ; \;\; z_M = 4e^{2i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_N = 3(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right))$$




### CORRECTION

1) Donner sous forme algébrique l'affixe des points A, B, C, E, G et H

$z_A = -3 + 3i$ ; $z_B = -2i$ ; $z_C = 3 + 5i$

$z_E = 3i$ ; $z_G = -3$ ; $z_H = 3 - 2i$

2) Donner, par lecture graphique, sous forme trigonométrique (ou exponentielle) les affixes des points A, B, E, F, G

- Le point $B$ est a pour coordonnées $(0; -2)$, on a donc :
  $|z_B| = OB = 2$ et $Arg(z_B) = (\vec{u}; \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2}$
  D'où : $z_B = 2(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \times sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)) = \boldsymbol{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}$

- Même raisonnement pour le point $E(0\,;3)$, d'où : $z_E = 3(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \times sin\left(\frac{\pi}{2}\right)) = \boldsymbol{3e^{i\frac{\pi}{2}}}$

- Enfin pour le point $G(-3;0)$, on a : $z_G = 3(\cos(\pi) + i \times \sin(\pi)) = \boldsymbol{3e^{\pi}}$

- Pour avoir la forme trigo du point $A$ il faut de même pouvoir déterminer la distance $OA$ et l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OA})$.
  On trouve rapidement la distance OA en appliquant le théorème de Pythagore, on a :
  On a $OA^2 = 3^2 + 3^2 = 18$, d'où $OA = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
  On constate par ailleurs que la droite $(OA)$ est une bissectrice de l'angle $\widehat{EOG}$, on en déduite donc que $(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4}$, et donc que $(\vec{u};\overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$
  D'où : $z_A = 3\sqrt{2}(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \times sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)) = \boldsymbol{3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

3) Donner, par le calcul, lorsque c'est possible, la forme trigonométrique (ou exponentielle) des affixes des points A, D ($z_D = 2\sqrt{3} - 2i$), F et C.

- $\boldsymbol{z_A = -3 + 3i}$
  $|z_A| = OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
  Notons $\theta_A = Arg(Z_A)$ :
  $\begin{cases} \cos(\theta_A) = \frac{x_A}{|z_A|} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_A) = \frac{y_A}{|z_A|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, d'où : $\boxed{\theta_A = \frac{3\pi}{4}}$ (on trouve $\theta_A$ avec le cercle trigo)
  On obtient bien : $z_A = 3\sqrt{2}(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \times sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)) = \boldsymbol{3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

- $\boldsymbol{z_D = 2\sqrt{3} - 2i}$
  $|z_D| = OD = \sqrt{x_D^2 + y_D^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 \times 3 + 4} = \sqrt{16} = 4$
  Notons $\theta_D = Arg(Z_D)$ :
  $\begin{cases} \cos(\theta_D) = \frac{x_D}{|z_D|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta_D) = \frac{y_D}{|z_D|} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases}$, d'où : $\boxed{\theta_D = -\frac{\pi}{6}}$ (on trouve $\theta_D$ avec le cercle trigo)
  On obtient bien : $z_D = 4(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \times sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)) = \boldsymbol{4e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

- Pour le **point $F$**, nous n'avons pas son ordonnée de manière précise mais nous pouvons constater que $x_F = \frac{3}{2}$ et que $OF = 3$
  Nous avons donc $|z_F| = 3$ et donc en notant $\theta_F = Arg(z_F)$ :
  $\cos(\theta_F) = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{2\times3} = \frac{1}{2}$ , d'où $\theta_F = \frac{\pi}{3}$ car on sait que $y_F > 0$
  On a donc : $z_F = 3e^{i\frac{\pi}{6}} = 3(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \times sin\left(\frac{\pi}{3}\right))$

Si l'on veut la forme algébrique il suffit alors de remplacer le cos $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ par leurs valeurs dans la forme trigonométrique :

$z_F = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \times sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 3\left(\frac{1}{2} + i \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

- $\boldsymbol{z_C = 3 + 5i}$

  $|z_C| = OC = \sqrt{x_C^2 + y_C^2} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$

  Notons $\theta_C = Arg(Z_C)$ :

  $\begin{cases} \cos(\theta_C) = \dfrac{x_C}{|z_C|} = \dfrac{3}{\sqrt{34}} \\ \sin(\theta_C) = \dfrac{y_C}{|z_C|} = \dfrac{5}{\sqrt{34}} \end{cases}$

  Ici on ne peut pas déterminer la valeur de l'angle car le cosinus et le sinus ne sont pas des valeurs connues.

4) Placer les points $I, J, K, L, M, N$, d'affixes respectives : $z_I = -1 + i$ ; $z_J = \frac{5}{2}i - 3$ ; $z_K = -2 - 2\sqrt{3}$ ;

$z_L = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ; $z_M = 4e^{2i\frac{\pi}{8}}$ ; $z_N = 3(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{5\pi}{6}\right))$

- Pour les points $I\ et\ J$ c'est facile.

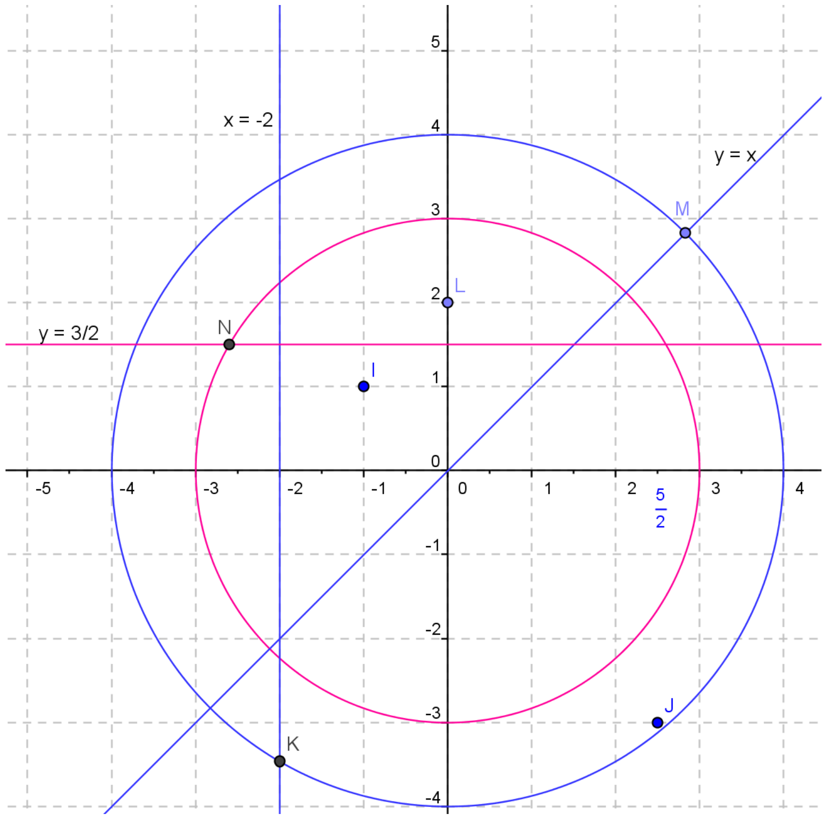
- Pour le point $K$, on peut facilement l'abscisse qui vaut -2, mais l'ordonnée n'est pas précise, on va donc calculer le module : $|z_K| = OK = \sqrt{(-2)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$. Il nous suffit alors de tracer le cercle de centre O et de rayon 4 et de placer le point $K$ à l'intersection de la droite d'équation $x = -2$ et du cercle, sachant que $y_K < 0$.

- Pour le point $L$, son module est 2, et son argument $\frac{\pi}{2}$ (il est donc sur l'axe des ordonnées), on peut ainsi en déduire sans calculs que $z_L = 2i$

- Pour le point $M$, il faut dans un premier temps simplifier $z_M = 4e^{2i\frac{\pi}{8}} = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$, le module vaut 4 et l'angle est $\frac{\pi}{4}$, il suffit donc de tracer un cercle de rayon 4, puis de placer le point à un angle de 45° par rapport à l'axe des abscisses (on peut tracer la droite d'équation $y = x$ ou bien utiliser le rapporteur).

- Pour le point $N$, on sait que le module est de 3, mais plutôt que d'utiliser l'angle et donc le rapporteur, il sera plus précis de mettre l'affixe du point sous forme algébrique :

$z_N = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$, on va ainsi pouvoir facilement placer le point $N$, en utilisant le fait que $y_N = \frac{3}{2}$. Le point $N$ sera donc à l'intersection du cercle de centre O et rayon 3 avec la droite d'équation $y = \frac{3}{2}$, sachant que $x_N < 0$.




## EXERCICE 5 - EXPRIMER SOUS FORME ALGEBRIQUE ET INTERPRETATION GRAPHIQUE

Soit $z = x + iy$ l'affixe du point $M(x; y)$.

On considère la transformation $f$, qui au point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$, telle que :

$$z' = \frac{2iz}{z - i} \quad \text{où} \quad z \neq i$$

1) Déterminer l'ensemble des point invariant par $f$ (telle que $f(M) = M$, c'est-à-dire $z' = z$)
2) Exprimer $z'$ sous forme algébrique
3) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des points $M$ tels que :
   a. $z'$ est un réel

b. $z'$ est un imaginaire pur

## CORRECTION

$$z' = \frac{2iz}{z-i}$$

1) Déterminer l'ensemble des point invariant par $f$ (telle que $f(M) = M$, c'est-à-dire $z' = z$)

On cherche ici $z$ tel que :

$$z = \frac{2z-1}{z-i} \quad \Leftrightarrow \quad z(z-i) = 2iz \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - iz - 2iz = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - 3iz = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z(z-3i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z = 0 \quad ou \quad z - 3i = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z = 0 \quad ou \quad z = 3i$$

Les points invariants par $f$ sont donc $O(0;0)$ et $A(0;3)$

2) Exprimer $z'$ sous forme algébrique

$$z = \frac{2iz}{z-i} = \frac{2i(x+iy)}{(x+iy)-i} = \frac{2ix-2y}{x+i(y-1)} = \frac{(2ix-2y)(x-i(y-1))}{(x+i(y-1))(x-i(y-1))} = \frac{2ix^2+2x(y-1)-2xy+2iy(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{2ix^2+2xy-2x-2xy+2iy^2-2iy}{x^2+(y-1)^2} = \frac{-2x+i(2x^2+2y^2-2y)}{x^2+(y-1)^2} = \frac{-2x}{x^2+(y-1)^2} + i\,\frac{2x^2+2y^2-2y}{x^2+(y-1)^2}$$

3) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des points $M$ tels que :

a. $z'$ est un réel

$$z' réel \quad \Leftrightarrow \quad Im(z') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x^2+2y^2-2y}{x^2+(y-1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 - 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2 \times y \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$z'$ est réel si et seulement si le point $M$ est situé sur le cercle de centre $B(0;\frac{1}{2})$ privé du point $C(0;1)$ car on doit avoir $z \neq i$

b. $z'$ est un imaginaire pur

$$z' imaginaire \quad \Leftrightarrow \quad Re(z') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2x}{x^2+(y-1)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

L'ensemble des points $M$ tel que $z'$ est un imaginaire sont donc l'ensemble des points situés sur l'axe des ordonnées privé du point $C(0;1)$.

## EXERCICE 6 – DU MODULE AUX DISTANCES ET INVERSEMENT

A) Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que :
1) $|z-1|=3$
2) $|z-1|=|z+i|$
3) $|z+3i-2|=|z+3|$
4) $|z-3+i|\leq 3$

B) Soit $A, B, C$, 3 points d'affixes respectives :

$z_A=-4-2i \quad ; \quad z_B=-3-4i \quad ; \quad z_C=1-2i$

1) Démontrer que ABC est un triangle rectangle
2) Déterminer l'affixe d'un point $D$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme
3) Considérons le point $E(9;2)$, montrer que les point $B, C\ et\ E$ sont alignés dans cet ordre

C) Soit $A, B, C$, 3 points d'affixes respectives :

$z_A=-4-2i \quad ; \quad z_B=-3-4i \quad ; \quad z_C=1-2i$

1) Calculer $|z_B-z_A|$ et

### CORRECTION

A) Déterminer l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que :

1) $|z-1|=3$

$|z-1|=3 \quad \Leftrightarrow \quad |z-z_A|=3 \quad (\text{en notant } A \text{ le point d'affixe } z_A=1)$

$\Leftrightarrow \quad AM=3$

$\Leftrightarrow \quad M \text{ appartient au cercle de centre } A(1;0) \text{ et de rayon } 3$

2) $|z-1|=|z+i|$

$|z-1|=|z+i| \quad \Leftrightarrow \quad |z-z_A|=|z-z_B| \quad (\text{avec } A \text{ d'affixe } z_A=1 \text{ et } B \text{ d'affixe } z_B=-i)$

$\Leftrightarrow \quad AM = BM$

$\Leftrightarrow \quad M$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$

3) $|z + 3i - 2| = |z + 3|$

$|z + 3i - 2| = |z + 3| \quad \Leftrightarrow \quad |z - (-3i + 2)| = |z - (-3)|$

$\Leftrightarrow \quad |z - z_A| = |z - z_B|$ (avec $A$ d'affixe $z_A = -3i + 2$ et $B$ d'affixe $z_B = -3$)

$\Leftrightarrow \quad AM = BM$

$\Leftrightarrow \quad M$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$

4) $|z - 3 + i| \leq 3$

$|z - 3 + i| \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad |z - (3 - i)| \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad |z - z_A| \leq 3$ (où $A$ est le point d'affixe $z_A = 3 - i$)

$\Leftrightarrow \quad AM \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad M$ est donc contenu dans le disque de centre $A$ et de rayon 3

B) Soit $A, B, C$, 3 points d'affixes respectives :

$z_A = -4 - 2i \quad ; \quad z_B = -3 - 4i \quad ; \quad z_C = 1 - 2i$

1) Démontrer que $ABC$ est un triangle rectangle

$AB = |z_B - z_A| = |-3 - 4i - (-4 - 2i)| = |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$AC = |z_C - z_A| = |1 - 2i - (-4 - 2i)| = |5| = 5$

$BC = |z_C - z_B| = |1 - 2i - (-3 - 4i)| = |4 + 2i| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

$AB^2 + BC^2 = 5 + 20 = 25$ et $AC^2 = 5^2 = 25$

On constate que $AB^2 + BC^2 = AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle $ABC$ est donc rectangle en $B$.

2) Déterminer l'affixe d'un point $D$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.

Soit $I$ le milieu de $[AC]$ : $z_I = \frac{z_A+z_C}{2} = \frac{-4-2i+1-2i}{2} = \frac{-3-4i}{2}$

On cherche donc l'affixe $z_D$ du point $D$ telle que :

$z_I = \frac{z_B+z_D}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-3-4i}{2} = \frac{-3-4i+z_D}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -3-4i = -3-4i+z_D \quad \Leftrightarrow \quad z_D = 0$

Le point $D$ est donc l'origine du repère $O$.

3) Considérons le point $E(9;2)$, montrer que les point $B, C\ et\ E$ sont alignés dans cet ordre

<u>Méthode 1 :</u>

Montrons que les vecteur $\overrightarrow{BC}\ et\ \overrightarrow{BE}$ sont colinéaires de même sens.

On a : $z_B = -3-4i$, $z_C = 1-2i$ et $z_E = 9+2i$, d'où :

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = 1-2i-(-3-4i) = 4+2i$

$z_{\overrightarrow{BE}} = z_E - z_B = 9+2i-(-3-4i) = 12+6i$

On constate que : $z_{\overrightarrow{BE}} = 3z_{\overrightarrow{BC}}$ , on a donc $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BC}$ ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{BC}\ et\ \overrightarrow{BE}$ sont colinéaires de même sens et donc les points $B, C\ et\ E$ sont alignés dans cet ordre.

<u>Méthode 2 :</u>

En utilisant les angles orientés, montrons que $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BE}) = 0 + 2k\pi$

$(\overrightarrow{BC}\,; \overrightarrow{BE}) = Arg\left(\frac{z_E-z_B}{z_C-z_B}\right) = Arg\left(\frac{z_E-z_B}{z_C-z_B}\right) = Arg\left(\frac{12+6i}{4+2i}\right) = Arg\left(\frac{3(4+2i)}{4+2i}\right) = Arg(3) = 0 + 2k\pi$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}\ et\ \overrightarrow{BE}$ sont colinéaires de même sens et donc les points $B, C\ et\ E$ sont alignés dans cet ordre.

# EXERCICE 7 – DE L'ARGUMENT AUX ANGLES ORIENTES

Soit $A, B, C\ et\ D$, 4 points d'affixes respectives :

$z_A = -4-2i \quad ; \quad z_B = -3-4i \quad ; \quad z_C = 1-2i \quad ; \quad z_D =$

Calculer et interpréter :

1)

## EXERCICE 8 - INTERPRETATION GEOMETRIQUE D’UNE EGALITE

## EXERCICES TYPES BAC